Introduction
Johannes Daubert's Transcript of Husserl's Mathematical-Philosophical Exercises (Summer Semester 1905)

Mark van Atten
IHPST (Paris 1/CNRS/ENS), Paris
and
Karl Schuhmann†

As is well-known Edmund Husserl's *Logical Investigations* (1900–1901) had their first, broader impact not on those who attended Husserl's lectures and seminars in Göttingen but on the students of Theodor Lipps, the psychologist and philosopher at the University of Munich. Responsible for this were the activities of Lipps's student Johannes Daubert (1877–1947), who from summer semester 1902 on promoted Husserl's work among his fellow students as the common point of departure for their philosophizing. Daubert's own intention had been to study with Husserl in Göttingen during winter semester 1904–1905,[1] but he had to postpone that plan until the following semester.

In summer semester 1905, however, not only Daubert went from Munich to Husserl in Göttingen, but he took with him Adolf Reinach (who in 1909 became a *Privatdozent* in Göttingen alongside Husserl), the aesthetician Dr. Fritz Weinmann,[2] the later psychiatrist Alfred Schwenninger,[3] and one more student of Lipps, whose name is lost—this was the well-known "Munich invasion

---

1. See Edmund Husserl, *Briefwechsel*, ed. Karl Schumann with Elisabeth Schuhmann, 10 vols. (Dordrecht: Kluwer, 1994), vol. 2, 40–42. Henceforth cited as *BW* with volume and page numbers.

2. Fritz Weinmann (b. 1878), who was awarded his doctorate on October 24, 1904 for the dissertation *Zur Struktur der Melodie* (Leipzig: J. A. Barth, 1904), which he wrote under Lipps's direction, died shortly after spending this semester in Göttingen (on October 28, 1905).

3. Alfred Schwenninger (1881–1975) was awarded his doctorate on July 25, 1907 in Munich for the dissertation *Der Sympathiebegriff bei David Hume. Eine Darstellung und Kritik* (Munich: Kastner & Callwey, 1908).

The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy IV (2004): 284–87
ISSN 1533–7472 • ISBN 0-9701679-4-6

of Göttingen."[4] In the words of a fellow student who remained in Munich: "There has been a desertion to Göttingen."[5] It was certainly for these advanced followers of his that Husserl's lectures on the "Theory of Judgment"[6] in summer semester 1905 were intended, as were his exercises in the history of philosophy "starting from recent literature," in which he will have discussed work especially by Wilhelm Dilthey, Wilhelm Windelband, and Heinrich Rickert. By contrast, the "Introductory Philosophical Exercises in the Main Problems of the Philosophy of Mathematics" (*Philosophischen Übungen zur Einführung in die Hauptprobleme der Philosophie der Mathematik*) that Husserl held that same semester, were likely aimed at the circle of students around David Hilbert; indeed, as Husserl later recalled,[7] the physicist Max Born and the mathematicians Ernst Hellinger and Robert König were among the participants, and most likely also Erhard Schmidt. Of those who had come from Munich, however, at least Johannes Daubert also took part in this course, in addition to Weinmann and Schwenninger.[8] However, of the likely twelve meetings (between May 4 and August 3, 1905), which took place on Thursdays from 7:00 to 8:30 p.m.,[9] he likely attended no more than nine; in any case he did not participate in the final meeting, since he had already traveled back to Munich by that time.

Written in his idiosyncratic shorthand, Daubert's manuscripts are deposited at the Bavarian State Library in Munich.[10] The convolute Daubertiana A I 5 contains not only his notes on Husserl's lecture course on the "Theory of Judgement" (A I 5/46–70)[11] but, following those, also his subsequent notes on the mathematical-philosophical exercises from summer semester 1905 (A I 5/71–79), which are published below. Except for pages 72 and 73, the pages have in fact been filed in the reverse order in the convolute—page 79 should come first, and page 71, last—which is located in an unnumbered folder labeled "H., M.P." (= "Husserl, mathematical-philosophical ⟨exercises⟩"). Except for the aforementioned pages 72 and 73, these are all separate pages (in their printed version below they are separated from one another by a horizontal bar),

4. Karl Schuhmann, *Husserl-Chronik. Denk- und Lebensweg Edmund Husserls* (The Hague: Nijhoff, 1977), 89.

5. Letter from Wolf Dohrn (Munich) to Aloys Fischer (Florence) dated May 14, 1905 (Bayerische Staatsbibliothek, Ana 345).

6. See Edmund Husserl, *Urteilstheorie. Vorlesung 1905*, ed. Elisabeth Schuhmann, Husserliana Materialien V (Dordrecht: Kluwer, 2002).

7. See Husserl's letter to Hermann Weyl from April 10, 1918 (*BW* 4, 288).

8. During summer semester 1905, Husserl also held a lecture course on "General History of Philosophy" (Allgemeine Geschichte der Philosophie) "for auditors from all faculties." It is doubtful that Daubert attended these lectures for beginners.

9. For unknown reasons, the ninth meeting took place on Tuesday, July 11, 1905 and not on the Thursday (July 13) as scheduled.

10. See Eberhard Avé-Lallemant, *Die Nachlässe der Münchener Phänomenologen in der Bayerischen Staatsbibliothek* (Wiesbaden: Harrassowitz, 1975), 125–38.

11. Daubert's notes on Husserl's seminar on the philosophy of history may be found in the convolute Daubertiana A I 12/30–42.

each of which probably corresponds to one session. The exact status of these pages is likewise difficult to determine. Page 79, written in ink, is most likely a later elaboration of the notes. Page 78 is written in pencil, as is most of page 76. These disparate writing media already indicate that the pages were not all written in one go; and the texts written in pencil may well have been written during the meetings themselves.

Daubert's manuscript shows many writing mistakes, which have been corrected without notice below. All editorial additions have been placed in pointed brackets ⟨. . .⟩. Daubert himself uses parentheses and square brackets, but these have not been standardized, since parts of the text in square brackets are most likely Daubert's own additions. Daubert's text was first transcribed in 1983 by Reinhold Nikolaus Smid.[12] For the present edition, we have consulted that transcription, but for the sake of simplicity have prepared a new transcription of our own.

Daubert studied philosophy and modern languages, and his mathematical competence was rather limited. As a result the quality of his notes—at present the only ones known of this seminar of Husserl's—is not always impeccable. For this reason it cannot always be unambiguously determined whether, and to what extent, the 1905 seminar was based on certain earlier manuscripts of Husserl's. In any case there is a certain kinship between this seminar and the "double lecture" that Husserl presented to the Mathematical Society in Göttingen at the end of 1901.[13]

The seminar begins with the notions of form and formalization, proceeds to the axiomatization and mechanization of reasoning, and culminates in a discussion of definiteness and completeness related to Hilbert's views. These themes are well-known from the "double lecture." In particular, the statement that axioms are either "obtained inductively" or "cannot be further proven and are really a priori" (A I 5/78) is clearly connected with the first two theories on the emergence of the imaginary which Husserl presented in 1901 ("empirically through induction" or "immediately evident a priori").[14] A closer, often word-for-word kinship also exists between page 71 and another text from the period surrounding Husserl's lecture.[15]

In fact between 1901 and 1905, little happened that could have forced Husserl to re-examine or expand the ideas from the "double lecture." Such an event did not occur before 1931, when Kurt Gödel published his first incompleteness theorem: whether or not this result in the end affects Husserl's views,

12. A copy of this transcription is in the Bayerische Staatsbibliothek München.

13. Husserl's notes from around the time of this lecture, which have not been preserved in their entirety, have been published Elisabeth Schuhmann and Karl Schuhmann, "Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901," *Husserl Studies* 17 (2001), 87–123.

14. Ibid., 93.

15. See ibid., 109–10.

it requires careful reflection to see what its impact actually is, and a seminar of this type would have been a good occasion to engage in such reflection. Attention may be drawn to the circumstance that around 1931 Felix Kaufmann was at the same time in contact with both Gödel (about the incompleteness theorems) and Husserl (about *Formal and Transcendental Logic*, as well as about a planned paper of his own, "Logische Prinzipienfragen in der mathematischen Grundlagenforschung").[16] This put Kaufmann in an excellent position to draw Husserl's attention to Gödel's work, which, regrettably, he did not do. Be that as it may, Dieter Lohmar[17] has convincingly argued that Gödel's theorem in fact does not invalidate Husserl's view on mathematics as set out in *Formal and Transcendental Logic*, which builds on the view expounded in this seminar: Husserl defines only manifolds "in the pregnant sense" as definite. One may add to this that already in 1917 Dietrich Mahnke had pointed out that it is not obvious that all of mathematics can be captured in one definite manifold (although to him it seemed that in the end it could be).[18] A marginal pencil mark alongside this remark in his copy of Mahnke's book (now at the Husserl-Archives in Leuven) suggests that Husserl was aware of it.

As for the question of Husserl's influence on Hilbert, it is relevant that at the meetings on July 11 and July 27 Husserl again insists on a point he made in the notes for the "double lecture" (97–98): Application of consistent rules for "imaginary" (or, to use Hilbert's term, "ideal") elements in the course of deductions from true axioms is by itself no guarantee that the conclusion (not referring to such elements) is also true. One requires some form of the principle of the excluded middle to establish this, for only then is 'not not true' equivalent to 'true'. From Hilbert's writings it is clear that he never picked up on his colleague's suggestion. Indeed, as late as 1928 L. E. J. Brouwer (presumably independently of Husserl) still found reason to make this objection to Hilbert's program.[19]

---

16. See Friedrich Stadler, *Studien zum Wiener Kreis* (Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1996), 278–80, and Husserl, *BW* 4, 179–81, respectively. Kaufmann's essay was meant for Husserl's *Jahrbuch*, but was not published there. The manuscript was made available under the title "Questions of Logical Principle in the Investigation of the Foundations of Mathematics" in Felix Kaufmann, *The Infinite in Mathematics: Logico-mathematical Writings*, ed. Brian McGuinness, trans. Paul Foulkes (Dordrecht: Reidel, 1978), 188–224.

17. Dieter Lohmar, *Phänomenologie der Mathematik* (Dordrecht: Kluwer, 1989), 197.

18. Dietrich Mahnke, *Eine neue Monadologie*, in *Kant-Studien Ergänzungsheft* 39 (1917), n. 32.

19. L. E. J. Brouwer, "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus," *Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences* 31 (1928), 374–79, here 375 and 377; English translation: "Intuitionistic Reflections on Formalism," trans. Stefan Bauer-Mengelberg, in Jean van Heijenoort, ed., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematics, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University, 1967), 490–92, here 491 and 492.

Johannes Dauberts Notizen zu Husserls Mathematisch-philosophischen Übungen vom SS 1905

Herausgegeben von Mark van Atten und Karl Schuhmann†

| I. A I 5/79

Zum Begriff der *Form*.

Als Form kann gelten

1. unbestimmte Gegenstände in dem Sinn, daß, was von ihnen gilt, auch für beliebige bestimmte Gegenstände einer bestimmten Spezies gilt. In diesem Sinne wären

a. relativ formal z. B. die Gattungsgegenstände oder -begriffe den Artgegenständen oder -begriffen ⟨gegenüber⟩,

b. absolut formal im Sinn von »irgendetwas überhaupt«.

2. Gewisse Beziehungen oder Zusammenhänge solcher unbestimmter Gegenstände.

a. relativ formal wäre z. B. die Beziehung oder der Zusammenhang des Ähnlichseins oder der Eigenschaft, sofern darunter fallen können alle Einzelfälle von Ähnlichkeit und Eigenschaft. Was von Eigenschaften überhaupt gilt, gilt für jede einzelne Eigenschaft. Solche relativ formalen Beziehungen gelten natürlich auch nur für bestimmte relativ formale Gegenstände, etwa Farbe oder Ding. Nicht für absolut formale (irgendetwas).

b. absolut formal wäre die Beziehung, hinsichtlich derer alle näher bestimmten Beziehungen variabel wären, oder die Beziehung, welche zwischen schlechthin unbestimmten Gegenständen möglich ist oder sind.

Es wären also hier Formen diejenigen letzten Fundamente der verschiedenen Gegenstände oder der verschiedenen Gegenstandsbeziehungen, welche alle inhaltlichen Einzelbestimmungen fundieren, derart, daß alles, was für diese gilt, auch für die inhaltlich näherbestimmten und variierenden gilt. Wie das »irgendetwas« die letzte Verflüchtigung des inhaltlichen Was bestimmter Gegenstände ist, so ist die letzte Beziehung des »ist« die letzte Verflüchtigung der jeweiligen bestimmten Relationen und sachlichen Einheitsbeziehungen. Letzte Verflüchtigung oder allgemeinste Natur, das, was sie alle teilen und wovon sie alle *Modi-*

The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy IV (2004): 288–316 (even)
ISSN 1533–7472 • ISBN 0-9701679-4-6

Johannes Daubert's Notes from Husserl's Mathematical-Philosophical Exercises, Summer Semester 1905

Edited by Mark van Atten and Karl Schuhmann†

I

On the concept of *form*.

The following can be regarded as form:

1. indeterminate objects in the sense that what holds of them holds also of any determinate objects of a determinate species. In this sense there would be

a. relatively formal objects, for instance, generic objects or concepts over against specific objects or concepts, and

b. absolutely formal objects in the sense of "anything whatsoever."

2. Certain relations or connections between such indeterminate objects.

a. relatively formal would be, for instance, the relation or connection of being similar or having a property insofar as all individual cases of similarity or the property can fall under it. What holds for properties as such holds for every determinate property. Such relatively formal relations hold, of course, only for certain relatively formal objects, such as color or thing. Not of absolutely formal objects (anything).

b. absolutely formal would be the relation with respect to which all more precisely determined relations would be variable, or the relation or relations that is or are possible between absolutely indeterminate objects.

Thus forms here would be those ultimate foundations of the various objects or of various objectual relations that found all particular determinations of content in such a way that everything that holds for these also holds for those of which the content is more precisely determined or varying. Just as the 'anything' is the final residue of the contentual What of determinate objects, likewise the final relation of the 'is' is the ultimate residue of the corresponding determined relations and material relations of unity. Final residue or most general nature, namely that which they all share and of which they are

* Translated by Marcus Brainard and Mark van Atten.

The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy IV (2004): 289–317 (odd)
ISSN 1533–7472 • ISBN 0-9701679-4-6

fikationen und *Variationen* sind. Daß überhaupt ein Gegenstand ein anderer sein kann, daß er durch einen anderen bestimmbar ist, gründet in der Natur der Gegenstände überhaupt, ist aber eine positive Erkenntnis. Die Satzform ist hier nichts anderes als die Idee des Sachverhalts in seiner fundamentalsten Natur.

II.

Form in einem ganz anderen Sinn.

Z. B. die propositionale, die attributive und die nominale Fassung des gleichen Sachverhalts. Dieses sind Formungen, die in keiner Weise in der Natur der Gegenstände und Gegenstandsbeziehungen gründen, und man kann hier nie sagen, ⟨es gebe⟩ ein Tatsachengebiet, für welches Sätze dieser Form gelten.

Auch diese Formen haben nur mögliche Anwendung bei bestimmten Gegenständen, nämlich die propositionale bei Sachverhalten. Aber sie sind nicht letzte Fundamente der Sachverhalte selbst, denn ebendasselbe kann auch in verschiedenen Formen gedacht werden. Es gründen diese Formen wahrscheinlich in den Modifikationsmöglichkeiten der gedanklichen Fassung (Pointierung des Meinens) von Sachverhalten überhaupt, nicht aber in der Natur dieser. Den Unterschied von relativer und absoluter Form gibt es hier nicht. Absolut sind diese Formen insofern zum Sachverhalt, als sie überhaupt nicht in ihm gründen. Aufklärung durch Phänomenologie der Gedanken oder der reinen Grammatik, aber nicht nach dem Apriori des letzten Bedeutungsgehalts, sondern nach dem Apriori der gedanklichen Beziehung, Pointierung des Meinens.

2. Formen wie »und, oder, auch«: auch dies gründet in keiner Weise in der Natur der Sachverhalte selber. Es ist lediglich Sache meiner Willkür, ob ich Gegenstände so oder so disjungiere und zusammendenke. Sie scheinen Formen des Gedankens zu sein. Trotzdem sind sie es nicht in dem Sinne wie die propositionalen, attributiven, nominalen Formungen. Es beziehen sich diese Gedankenglieder oder -momente auf die gedachte Gegenständlichkeit intentional anders. Sie stellen zwischen ihnen Disjunktionen her, dabei auch eigentümliche Zusammenhänge mit der Natur der Gegenstände und Gegenstands- (Sachverhalts-) momente. A oder »ist«, A oder »und« ergibt keinen Sinn, weil »ist« und »und« nicht disjungierbar sind. Dazu gehören selbständige Gegenstände. Sie müssen disjungierbar sein. Trotzdem hat es keinen Sinn zu sagen, daß diese Form in der Natur der Gegenstände oder Kollektionen gründe. Sätze dieser Form können auch nicht wieder Sätze einer anderen Form begründen.

---

3. Formen wie »alle«, »ein«.

Diese setzen voraus:

a. daß es sich um zählbare und disjungierbare Gegenstände handelt.

b. Sie gründen in der Natur der Gegenstände als Konkretionen. Und ermöglichen Erkenntnisse. In die Klasse der »Ist«-Bestimmung gehörig.

all *modifications* and *variations*. That an object can at all be another, that it can be determined by another, is grounded in the nature of objects in general, but is a positive cognition. The sentential form is here nothing but the idea of the state of affairs in its most fundamental nature.

II

Form in a completely different sense.

For instance, the propositional, the attributive, and the nominal apprehensions of the same state of affairs. These are formations that are in no way grounded in the nature of the objects and the relations between objects, and one can never say here that there is a domain of facts for which sentences of this form hold.

These forms, too, have possible application only to certain objects, namely the propositional form to states of affairs. But they are not ultimate foundations of the states of affairs themselves, for the same states of affairs can be thought in various forms. These forms are probably grounded in the possibilities of modifying the way in which we grasp (come to mean) states of affairs as such in thought, but not in the nature of the latter. Here there is no difference between relative and absolute form. These forms are absolute with respect to a state of affairs insofar as they are not grounded in the latter at all. Clarification through phenomenology of thoughts or of pure grammar, though in accordance not with the Apriori of the ultimate significative content but with the Apriori of the way in which we think them, come to mean them.

2. Forms such as 'and', 'or', 'also': these, too, are in no way grounded in the nature of the states of affairs themselves. It is merely a matter of my will whether I oppose objects or think them together in one way or another. They seem to be forms of thought. Nevertheless, they are not forms in the sense in which propositional, attributive, nominal formations are. These parts or moments of thought are in a different way intentionally related to the objectuality thought. They bring about disjunctions between them, as well as peculiar connections with the nature of objects and moments of an object (or state of affairs). 'A or "is"', 'A or "and"' make no sense, because 'is' and 'and' cannot be placed in a disjunction. For that, independent objects are necessary. They must be disjoinable. Nevertheless, it makes no sense to say that this form is grounded in the nature of objects or collections. Nor can sentences of this form found in turn sentences of another form.

---

3. Forms such as 'all', 'one'.

These presuppose:

a. that the objects in question are countable and disjoinable.

b. They are grounded in the nature of objects as concretions. And make cognitions possible. Belonging to the class of 'is'-determinations.

❖

| *Axiome* (fest definierte Begriffe). Dies als gegebene Sätze: A I 5/78

1. induktiv gewonnen,

2. nicht weiter beweisbar und eigentlich apriorisch. Deduktive Wissenschaft. Sie leitet aus diesen Axiomen das ganze System der zusammenhängen⟨den⟩ Sätze ab. Nicht einfache Haufen, sondern gegliederte systematische Zusammenhänge.

Jeder Schluß steht unter einem Schlußgesetz, welche in den Schlußformen ihren Ausdruck finden. Diese Schlußgesetze haben nichts zu tun mit dem jeweiligen Tatsachengebiete, auf dem wir deduzieren. Keine Beziehung auf bestimmtes Erkenntnisgebiet (Geometrie oder sonst was).

Die Formalisierung besteht nun darin, daß man alles, was im Satz gegenständliche Beziehung besagt, das bestimmte S, das bestimmte P, die bestimmte Beziehung zwischen ihnen (Intensitätsbeziehung, gleich, größer usw.), herausgesetzt. Damit werden aus den Sätzen Satzformen. Es wird nun auch nichts mehr aus Axiomen deduziert. Denn die Axiome sind bestimmte Sätze oder Wahrheiten. Es treten in der Formalisierung an Stelle der Axiome Axiomsformen.

So werden z. B. für Gerade, Punkt, Kreis usw. ganz unbestimmte Gegenstände eingesetzt. Ein gewisses Gebiet von Gegenständen (das schlichte Irgendetwas) oder eine Mannigfaltigkeit von Gegenständen. Diese Begriffe von Gegenständen, eine Klasse von Gegenständen wird nun so bestimmt, daß für sie bestimmte Sätze einer bestimmten Form gelten. Für die sonst ganz unbestimmt bleibenden Gegenstände einer Klasse oder Mannigfaltigkeit soll z. B. gelten, daß 2p gelten 1g. Durch die Form der Sätze wird die Mannigfaltigkeit bestimmt. Damit ist die Mannigfaltigkeit dadurch bestimmt, daß in ihr gewisse Arten von Gegenständen gelten, für welche bestimmte Beziehungen und Verknüpfungen gelten, welche Sätze gewisser Form zulassen. Damit ist die Mannigfaltigkeit M in bestimmter Weise bestimmt. Jetzt sind ⟨es⟩ die Axiome und Satzformen, welche eine ganz unbestimmte Mannigfaltigkeit charakterisieren. In der formalen Mathematik ist Axiom = Axiomsform und Bestandstück einer Definition.[1]

Schematisches Beispiel: Wenn ein Satz oder Sätze *dieser Form* gelten, so gelten auch Sätze *jener Form*.

Definition A^{I}: D{p g; 2p g: 2p q}. A^{II}: |D|

II ist eine deduktive Wissenschaft, z. B. die Geometrie.

I ist die Theorie einer Mannigfaltigkeit. D entspricht sich bei beiden, aber nicht das A_{I}.

[Unter Voraussetzung einer Mannigfaltigkeit, für welche Axiome dieser oder jener Art gelten, gelten diese oder jene Sätze.] Ausschlaggebend ist der Be-

1. Nämlich die Definition einer Mannigfaltigkeit.

❖

Axioms (firmly defined concepts). As given sentences they are:

1. obtained by induction,

2. not further demonstrable and strictly speaking a priori. Deductive science. It derives from these axioms the entire system of interconnected sentences. Not simple heaps, but structured systematic connections.

Every inference is subject to a law of inference, which are expressed in the forms of inference. These laws of inference have nothing to do with the particular regions of facts about which we deduce. No relation to a determinate domain of knowledge (geometry or some other).

Formalization now consists in setting aside everything in the sentence that signifies an objectual relation, such as the determinate S, the determinate P, the determinate relation between them (relation of identity, equal to, greater than, etc.). The sentences thereby become sentential forms. Nothing is deduced from the axioms any longer. For the axioms are determinate sentences or truths. In the formalization the axioms are replaced by axiomatic forms.

Thus, for example, for straight line, point, circle, etc., completely indeterminate objects are substituted. A certain domain of objects (the mere something) or a manifold of objects. These concepts of objects, a class of objects is now determined such that for them determinate sentences of a determinate form hold. For a class or manifold of objects that otherwise remain wholly indeterminate it is said to hold, for example, that 2p equal 1g. The manifold is determined by the form of the sentences. Thus the manifold is determined by the fact that in it certain kinds of objects exist, for which determinate relations and connections obtain, which allow of sentences of a certain form. Thus the manifold M is determined in a determinate way. Now it is the axioms and sentential forms that characterize a completely indeterminate manifold. In formal mathematics axiom = axiomatic form and component part of a definition.[1]

Schematic example: If a sentence or sentences of *this form* hold(s), then sentences of *that form* also hold.

Definition A^{I}: D{p g; 2p g: 2p g}. A^{II}: |D|

II is a deductive science, for example, geometry.

I is the theory of a manifold. D corresponds with itself in both cases, but A_I does not.

[On the assumption of a manifold for which axioms of this or that kind hold, these or those sentences hold.] Decisive is the concept of the indeter-

1. Namely, of the definition of a manifold.

griff des unbestimmten Gegenstands: Irgendetwas oder Mannigfaltigkeit. Idee einer unbestimmten Vielheit von Objekten. Diese wird nun bestimmt lediglich durch die Formen und den Wesenszusammenhang der Satzformen. Eine Theorie dieser Form gilt für irgendeine Mannigfaltigkeit, welche durch jene Form bestimmt ist. Eine besondere Mannigfaltigkeit ist z. B. die Geometrie.

❖

| *Die Mechanisierung* A I 5/77

Man kann die Größe und die Größe als Mannigfaltigkeit fassen, als Zahlfaktoren, und die Axiome als Zahlregeln fassen und jetzt nach diesen Zahlregeln mit jenen Zeichen mechanisch operieren. Es stehen so den mathematischen Begriffen und den Axiomen ganz parallel die Zeichen und die Zahlregeln. Mit diesen rechnen wir. Rechnen ist ein systematisches Operieren aufgrund von vorausgestellten Regeln. Dieses ist ein rein algorithmisches Verfahren (in altem Sinne und nicht im neueren mathematischen Sinn als starre Folge von festgesetzten Operationen). Arithmetisch ist 2 eine Anzahl. Als Zahlzeichen ist 2 nur Faktor, der durch die Zahlregel Bedeutung gewinnt. Durch die Art, wie die Zeichen in die verschiedenen Zahlregeln eintreten, gewinnen sie Bedeutung. $a + 1 = 1 + a$, $a \cdot 1 = a$.

Die eindeutige Korrespondenz zwischen Zahlregeln und Zahlsystemen und andererseits Sätzen und Axiomen ist die einer Zuordnung.

Hier ist die Rede von Gestatten. Dort die Rede von Folgen.

Darin liegt Denkökonomie. Indem man sich in den Sinn und das Wesen der Begriffe vertieft, erfaßt man als zugehörig gewisse Axiome und durch Deduktion aus ihnen gewisse Folgerungen. Mit der Ausbildung des Denkens in diesem Gebiete kommt man dazu, mit bloßen Zeichen zu operieren. Dem allgemeinen arithmetischen Satz entspricht ein berechtigtes Operieren mit Zeichen. Den arithmetischen Begriffen unterschieben sich unwillkürlich Zeichen und Zeichenoperationen. Auch beim weiteren erfindenden Denken genügen nun in weitem Maße die Zahlregeln ⟨statt⟩ Zahlbedeutungen. Das Rechnen, was zu einer Mannigfaltigkeit gehört, in Parallele zur eigentlichen Theorieform jener Mannigfaltigkeit.

1) M_0 (bestimmte Mannigfaltigkeit. Etwa die räumliche. Konkrete Mathematik. Mit bestimmten Sach- oder Begriffsgebieten. Hier sachliche Deduktion.)

2) M_X (Gedanke irgendeiner Mannigfaltigkeit von Objekten, nur durch Satzformen bestimmt. Der Index des Raumes kommt hier nicht mehr in Frage. Alle Termini von M_0 sind hier durch Unbestimmte ersetzt, und nur die Formen der Sätze von M_0 bestehen hier noch.) Die Theorie von M_X ist nun ohne weiteres auf M_0, M_1, M_2 usw. zu übertragen.

3) Algorithmus. Die algorithmische Form. Diese hat dieselbe Allgemeinheit gegenüber M_1, M_2, M_3 usw. wie M_X.

minate object: anything whatsoever or manifold. The notion of an indeterminate multiplicity of objects. This now is determined merely by the forms and the essential connection of the sentential forms. A theory of these forms holds for some manifold or other that is determined by that form. A special manifold is, for example, geometry.

❖

Mechanization

One can conceive the magnitude and the magnitude as manifold, as numerical factors, and conceive the axioms as numerical rules and now operate mechanically with those signs in accordance with these numerical rules. Thus the signs and numerical rules are completely parallel to the mathematical concepts and the axioms. We calculate with the former. Calculation is a systematic operation on the basis of rules that are fixed in advance. This is a purely algorithmic procedure (in the old sense and not in the sense of modern mathematics as a rigid sequence of fixed operations). Arithmetically, 2 is a cardinal number. As a numeral, 2 is a factor that gains significance only through the numerical rule. Through the way in which the signs enter into the various numerical rules, they gain significance. $a + 1 = 1 + a$, $a \cdot 1 = a$.

The unequivocal correspondence between numerical rules and numerical systems and, on the other hand, sentences and axioms is that of a mapping.

In the first case, the theme is permission. In the second case, the theme is deduction.

That implies economy of thought. By engrossing oneself in the meaning and essence of the concepts, one grasps certain axioms involving them and by deduction from them certain conclusions. When one trains one's thinking in this area, one begins to operate with mere signs. To the general arithmetic sentence corresponds a legitimate operation with signs. Signs and sign operations are automatically attached to arithmetic concepts. Also in the case of further inventive thinking now to a large extent the ⟨formal⟩ numerical rules suffice instead of significations of number terms. Calculation with respect to a manifold in parallel to the proper theoretical form of that manifold.

1) M_0 (determinate manifold. Say, a spatial manifold. Concrete mathematics. With determinate domains of objects or concepts. Here material deduction.)

2) M_X (thought of some manifold or other of objects, determined only by sentential forms. The spatial aspect no longer comes into question here. All terms of M_0 are replaced here with indeterminates, and only the forms of the sentences of M_0 still exist here.) The theory of M_X is now applied without further ado to M_0, M_1, M_2, etc.

3) Algorithm. The algorithmic form. This has the same generality with respect to M_1, M_2, M_3, etc., as M_X.

Hier ist nicht mehr wie in M_X die Rede von gewissen Objekten, welche gewisse Verknüpfungen haben von dieser Form. Hier sind nur bestimmend gewisse Zahlfaktoren und Zahlregeln.

Jeder Mannigfaltigkeit entspricht ein Zahlsystem. Statt Satz- oder Sachverhaltsform kann ich ohne weiteres sagen Zahlform. Es bleibt nur die Disposition, evtl. auf die Bedeutungen zurückzugehen.

Ein Rechensystem paßt für ganze Klassen von Mannigfaltigkeiten. Damit Hinweis auf die reine Theorienform, die dem Algorithmus parallel ist. Man kann sagen, daß der Algorithmus oder die verschiedenen Zahlregeln selber unter die M_0, $_1$, $_2$ usw. gehören, unter die bestimmten Mannigfaltigkeiten, welche in M_X formalisiert werden können.

Die strenge Parallelisierung von Algorithmus und Theorienform hinkt aber.

Hier das Problem der Erweiterung des Zahlsystems oder der Einschränkung.

Bis Ohm und Grassmann kannte man nur Anzahlen.[2] Negative Zahlen waren da noch nicht möglich. Es hatte keine Schwierigkeit, a – b zu vollziehen, wenn a größer war als b. Man wendete nun den Algorithmus an und verfuhr nach Zahlregeln, indem man Zahlspezies und Buchstabenspezies einführte. Und man übertrug diese Spezies auf weiteres Sein als es überhaupt Sinn hatte (wenn b größer war als a). Und es stellte sich nun heraus, daß man mit den sinnlosen Regeln und Zeichen weiter operierte, ohne sich um die beschränkenden Bedingungen zu kümmern. (Z. B. eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl wird.) Also doppelte Sinnlosigkeit ⟨zum⟩ Resultate bekam. Es führte zu klaren Resultaten, indem sich im Laufe der Operationen die sinnlosen Zeichen wieder ganz nach den Zahlregeln ausschalteten. Oft aber kam man zu falschen und unsinnigen, wenn man den Zahlenregeln folgte (z. B. bei den divergenten Reihen).

Nun war die Frage nach den Grenzen des Algorithmus. Den Zeichen folge ich, und die Zeichen wollen etwas, und ich komme zu Resultaten, aber man wußte nicht wie und verstand es nicht.

Hier die Philosophie und Logik der Mathematik nötig. (Früher Metaphysik des Kalküls genannt.)

---

2. Gemeint ist der Mathematiker Martin Ohm (1792–1872), nicht sein Bruder, der Physiker Georg Simon Ohm (1789–1854). Diese Stelle ist selbstverständlich nicht wortwörtlich zu nehmen, weil negative Zahlen schon seit der Antike bekannt sind und verwendet wurden. Die Formulierung ist wohl ein Artefakt des Mitschreibens. Der beabsichtigte Sinn muß sein, daß Ohm und Grassmann die ersten waren, die algebraische Behandlungen von Zahlensystemen geliefert haben, die negative Zahlen beinhalteten: Martin Ohm, *Versuch eines volkommen consequenten System der Mathematik*, Bd. I, 2. Aufl., Berlin: T. H. Riemann, 1828–29; Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Berlin: Enslin, 1861. Hao Wang gab 1957 dem Werk Grassmanns eine völlig axiomatische Form und bemerkte: »The application of the axiomatic method in the development of numbers is not natural. Its rather late appearance is evidence.« Hao Wang, »The Axiomatization of Arithmetic«, in *Journal of Symbolic Logic* 22, 1957, S. 145–157, hier S. 146.

Unlike in M_X, here the talk is no longer of certain objects that have certain connections of this form. Determinative here are only certain numerical factors and numerical rules.

To each manifold there corresponds a numerical system. Instead of forms of sentences or states of affairs, I can without further ado say numerical form. All that remains is the proneness perhaps to return to the significations.

A calculating system is suitable for entire classes of manifolds. Thereby, reference to the pure theoretical form, which is parallel to the algorithm. One can say that the algorithm or the various numerical rules belong to $M_{0, 1, 2}$, etc., to the determinate manifolds that can be formalized in M_X.

The rigorous parallelization of algorithm and theoretical form doesn't work, however.

Here the problem of the extension of the numerical system or its limitation.

Until Ohm and Grassmann, only cardinal numbers were known.[2] Negative numbers were not yet possible there. There was no difficulty in performing a – b if a was larger than b. Now the algorithm was applied and proceeded in accordance with numerical rules by introducing number species and letter species. And these species were applied to more objects than made any sense (if b was larger than a). And it then turned out that one continued to operate with the meaningless rules and signs without bothering to consider the restricting conditions. (For example, a number that multiplied by itself becomes a negative number.) Thus attaining a twofold meaninglessness as the result. It led to clear results insofar as in the course of the operations the meaningless signs disappeared again in complete accordance with the numerical rules. Oftentimes, however, one attained false and nonsensical results when one followed the numerical rules (e.g. in the case of divergent series).

Now the question concerned the limits of the algorithm. I follow the signs, and the signs want something, so to speak, and I attain results, but one didn't know how and didn't understand it.

Here philosophy and logic of mathematics are necessary. (Previously called metaphysics of the calculus.)

---

2. Meant here is the mathematician Martin Ohm (1792–1872), not his brother, the physicist Georg Simon Ohm (1789–1854). Of course, this passage is not to be taken literally, because negative numbers have been known and used since antiquity. The formulation is likely to be an artifact of the note-taking. The intended meaning must be that Ohm and Grassmann were the first to give algebraic treatments of number systems that include negative numbers. See Martin Ohm, *Versuch eines volkommen consequenten System der Mathematik* I (Berlin: Riemann, 2d ed., 1828–29) and Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* (Berlin: Enslin, 1861). In 1957 Hao Wang put Grassmann's work into fully axiomatic form and commented: "The application of the axiomatic method in the development of numbers is not natural. Its rather late appearance is evidence." Hao Wang, "The Axiomatization of Arithmetic," *Journal of Symbolic Logic* 22 (1957), 145–57, here 146.

Die Formalisierung eines axiomatischen Gebiets hängt an gewissen Grenzen. Außerhalb jener Grenzbedingungen wird es sinnlos. Trotzdem geschieht es oft, daß man die Grenzbedingungen außer Acht lassen kann, trotzdem weiterzählt und wieder durch den Unsinn hindurch zu rechten Resultaten kommt.

❖

| *Husserl, Mathematisch-Philosophische Übungen* A I 5/76

Deduktive Wissenschaften sind:

1) Arithmetik, Geometrie (im alten Sinn): apriorische Wissenschaften. Die Obersätze der Lehrsätze sind hier Sätze, deren Leugnung Widerspruch ergibt.

2) Theoretische Astronomie, analytische Mechanik: Erfahrungswissenschaften. Die Obersätze sind hier Lehrsätze, deren Leugnung keinen Widerspruch ergibt.

1. Satzformen: Subjekt, Prädikat. Eine gewisse Gegenständlichkeit, habend gewisse Bestimmtheiten.

2. Gegenstandsformen: Z. B. die Allheit bezieht sich auf einen Umfang von Gegenständen.

Es gibt Unsinn bei einfachen Wortzusammenstellungen.

Es ergibt Sinn, wenn wir gewisse ganz unbestimmte Gegenstände in gewissen Formen denken.

Es ergibt Wahrheit, wenn wir Sätze in bestimmten Formen denken. Sätze, welche solchen Formenzusammenhängen nicht entsprechen, sind falsch; die, welche ihnen entsprechen, sind wahr.

Soll von wahr oder falsch überhaupt geredet werden können, so müssen wir in bestimmten Formen denken (rein grammatischen). Zu den Formen gehören nun Gesetze, derart, daß man von wahr und falsch reden kann, ohne über die Formen hinauszugehen. (Bei mathematischen kann ich einsehen, daß er durch seine bloße Form verurteilt ist, falsch zu sein, einerlei, ob von chemischen oder physischen Gegenständen).

Zu den Bedeutungsformen gehören Gesetze, welche alles, was darunter fällt, in Wahres oder Falsches zerfällen. Es gibt damit Sätze, welche in Rücksicht auf reine Form und allein durch diese falsch sind, und solche, welche wegen ihrer bestimmten Begriffe falsch sind (materiale Wahrheit und Falschheit).

Frage: Welches sind die Geltungsgesetze, die zu den Formen gehören, oder Sphäre von analytischen Sätzen?

Reine Mathematik (Mathesis) im Sinne Leibniz' ist die Wissenschaft von der reinen Form.

Zu unterscheiden sind nun formale Gesetze und Sätze, die aufgrund reiner Form wahr oder falsch sind. Z. B. Ein Rotes ist nicht-rot. Dieses ist kein formales Gesetz. Sondern aufgrund der bloßen Form falsch. Der Satz ist schon falsch, wenn ich für Rot Irgendetwas überhaupt substituiere.

There are certain boundaries to the formalization of an axiomatic domain. Beyond those boundary conditions it becomes meaningless. Nevertheless, it often happens that one can disregard the boundary conditions, count further all the same, and after passing through nonsense again achieve legitimate results.

❖

Husserl, Mathematical-Philosophical Exercises

Deductive sciences are:

1) arithmetic, geometry (in the old sense): a priori sciences. Here the first principles on which the theorems are based are sentences whose denial yields contradiction.

2) Theoretical astronomy, analytical mechanics: experiential sciences. Here the first principles are sentences whose denial yields no contradiction.

1. Sentential forms: subject, predicate. A certain objectuality, having certain determinacies.

2. Objectual forms: For example, totality is related to a range of objects.

There is nonsense in the case of simple combinations of words.

Meaningfulness is obtained when we think of certain completely indeterminate objects according to a certain form.

Truth is obtained when we think of sentences that have a determinate form. Sentences that do not answer to such formal connections are false; those that answer to them are true.

If it is to be possible to speak at all of the true or false, then we have to think in determinate forms (purely grammatical). With the forms are now associated laws of such a kind that one can speak of the true and false without going beyond the forms. (In the case of a sentence expressing something mathematical, I can see that it by its mere form is destined to be false, regardless of whether one has to do with chemical or physical objects.)

To the significative forms correspond laws that divide everything that is subject to them into either the true or the false. Thus there are sentences that are false with regard to pure form and because of it alone and those that are false due to their determinate concepts (material truth and falsity).

Question: Which are the laws of validity that correspond to the forms or the sphere of analytic sentences?

Pure mathematics (*mathesis*) in Leibniz's sense is the science of pure form.

Now to be distinguished are formal laws and sentences that are true or false on the basis of pure form. For example, something red is not-red. This is not a formal law. But on the basis of mere form it is false. The sentence is already false when I substitute 'anything whatsoever' for 'red'.

Anders: »Jede Satzkomplexion dieser Form ist falsch« ist ein formales logisches Gesetz.

❖

| Der Bau der reinen Theorien muß so erfolgen, daß man Grundsätze aufstellt (nicht Axiome). Auf diese Grundsätze gehen nun gewisse Einzeldisziplinen, z. B. reine Kombinationslehre, reine Arithmetik usw. A I 5/75

Jeder Schritt eines Schlusses muß nun unter diesen Grundsätzen stehen, so daß alles durch bloße Subsumtion vollzogen wird. Alle Denkarbeit ist erledigt, nachdem einmal die Grundsätze fixiert werden. (Das Finden ist nicht Deduktion, sondern Aufspüren. Als Grundsatz muß er unmittelbar evident sein.)

Satz vom Widerspruch oder Modus Barbara oder ponens. Diese gehören zu allen Grundsätzen überhaupt.

Aufstellung der Grundsätze, über die man unmittelbar verfügen kann. A ist B, B ist C, also ist A C. Dieser Satz gilt, wenn er ein Fall ist eines bestimmten Grundsatzes (Barbara).

Z. B. die Zahl ist ein Begriff, der in allen Wissenschaften auftritt, und dies bestimmt Sätze.

So verfährt man z. B. in der Arithmetik deduktiv, aber zur Idee des deduktiven Denkens überhaupt gehören Grundsätze überhaupt. Z. B. Syllogistik. Solche, die zu der Idee der Beschaffenheit, Merkmal usw. überhaupt gehören. Und hier einerlei, ob in Arithmetik oder in irgendeiner anderen deduktiven Wissenschaft.

Eine Gruppe von Gebieten als Syllogistik oder eine andere, die Lehre von den Relativen.

Die Form des Schlusses in den deduktiven Wissenschaft⟨en⟩ muß unter Grundsätzen stehen oder Axiomen. Hier wird einfach subsumiert; dieses in Gegensatz zu den Axiomen, aus denen deduktiv entwickelt wird.

Gesetze, welche für Sätze gelten, z. B. ($A \in B, B \in C, A \in C$).

Ich kann nun die Sätze formalisieren. Und bekomme nun beliebige Mannigfaltigkeitslehren.

Formales System von Sätzen, die der Form nach sich decken mit den Sätzen über Zahlen.

Eine Theorie, die rein logischer Natur ist, kann wieder formalisiert werden. Die Lehre von den Theorienformen überhaupt ist eine Sphäre der Konvention oder Willkürlichkeit.

Indem jetzt die Einzelsätze formalisiert werden (Mannigfaltigkeitslehre) und andererseits die Grundsätze angezogen werden, haben wir eine Deduktion, in der kein Schritt gemacht wäre, der nicht Subsumtion wäre.

Die Bedeutung der Formalisierung ist hiermit:

1. Strenge.

Differently: 'Every sentential complex of this form is false' is a formal, logical law.

❖

The construction of pure theories has to proceed by laying down principles (not axioms). On these principles are based now certain individual disciplines, for example, pure combinatorics, pure arithmetic, etc.

Every step in an inference must now be subject to these principles, so that everything is carried out by mere subsumption. All intellectual work is over and done with once the principles have been fixed. (Finding is not deduction, but rather tracking down. As a principle, it must be immediately evident.)

Principle of non-contradiction or modus Barbara or modus ponens. These belong to all principles as such.

Laying down principles that one can have immediately at one's disposal. A is B, B is C, thus A is C. This sentence is valid when it is an instance of a determinate principle (Barbara).

For example, number is a concept that is found in every science, and this determines sentences.

Thus one proceeds, in arithmetic for example, deductively, but to the idea of deductive thinking as such belong principles as such. For example, syllogistic. Those that belong to the idea of quality, characteristic feature, etc., as such. And here it doesn't matter whether it is in arithmetic or in some other deductive science.

A group of domains such as syllogistic or another one, the theory of relations.

The form of the inference in the deductive sciences must be subject to principles or axioms. Here one simply subsumes; this in contrast to the axioms, from which one develops deductively.

Laws that hold for sentences, for example: ($A \in B$, $B \in C$, $A \in C$).

I can now formalize the sentences. And attain now any number of theories of manifolds.

Formal system of sentences that by their form coincide with the sentences about numbers.

A theory that is of a purely logical nature can itself be formalized. The doctrine of theoretical forms in general is a sphere of convention or arbitrariness.

By formalizing now the individual sentences (theory of manifolds) and, on the other hand, applying the principles, we have a deduction in which no step would be taken that would not be subsumption.

The significance of formalization is herewith:

1) Rigor.

2. Wenn wir eine bestimmte Theorie formalisieren, haben wir einen Typus von Theorien. Wir haben alle Arbeit geleistet für sämtliche Theorien, die gleiche Satzformen und Grundsätze haben. Z. B. wenn die Arithmetik als Zahlenlehre aufgebaut ist von einer bestimmten Form, dann gilt das, ⟨was⟩ für diese Formen gilt, auch in anderen Theorien.

3. Separation der theoretischen Axiomgruppen. Indem ich gewisse Satzformen modifiziere, modifiziert ⟨s⟩ich der ergänzende Körper der Theorien. Diese Modifikation kann man gesetzlich machen und erhebt sich über die Theorieform hinaus, faßt eine Mannigfaltigkeit als ein Glied einer Mannigfaltigkeit von Mannigfaltigkeiten, einer Theorienform von Theorienformen. So gewinnt man eine Art der Allgemeinheit, welche mit einem Schlage für einen ganzen Körper von Mannigfaltigkeiten die Theorieform erledigt. Z. B. den euklidischen dreidimensionalen Raum als n-dimensional und Krümmungsmaß auch als ein Element einer unendlichen umfassenden Gattung. Nun allgemeine Theorien für alle diese Gattungen. Mit einem Schritt wird nun die ganze deduktive Arbeit für große Gruppen von Mannigfaltigkeiten erledigt. Verständnis der Strenge von Satz- und Theoriengruppen, die an einzelnen Axiomen hängen.

❖

| *Mathematische Übungen, 29. Juni* A I 5/74

Die rechnerische Umformung des Mathematischen verhalf zu Resultaten, selbst wo Rechnungsglieder auftreten, welche niemals sinnvoll ausgemünzt werden konnten, z. B. $\sqrt{-1}$ usw. Es ging aber das Rechnen nicht beliebig weit. Man stieß auf Grenzen. Z. B. bei konvergenten unendlichen Reihen verhalf das Rechnen zu richtigen Resultaten. Das Rechnen mit divergenten unendlichen Reihen ergab solche Resultate nicht.

Ursprünglicher naiver Zahlbegriff war der der Anzahl:

1) a + b + c, etwa 3 Maurer,

2) 3a = a + a + a. Hier ist 3 eine Anzahl für eine Anzahl.

Diese Anzahlen müssen ganze Zahlen sein. Schon bei einem Bruch kommen wir auf eine Sinnlosigkeit: 1/2 Maurer gibt es nicht. a – b, a/b sind jetzt imaginäre Anzahlen, mit denen man rechnet, und in dieser Rechnung ist man über den ursprünglichen Anzahlbegriff hinausgegangen. In einem stetigen Größengebiet, sagt man dann, hat z. B. der Bruch Sinn. Bei Anzahlen von Menschen usw. hat es keinen Sinn. Brüche und negative Zahlen bedeuten dann keinen Widersinn, wenn man mit stetigen Größen arbeitet. Auch –a läßt sich dann zu einem anschaulichen Sinn ausmünzen.

$\sqrt{-1}$ bekam durch Gauß in der Geometrie Darstellung.

2) When we formalize a determinate theory, we have a type of theory. We have done all the work for all the theories that have the same sentential forms and principles. For example, if arithmetic is built as a theory of number of a determinate form, then what holds for these forms holds also in other theories.

3) Separation of the groups of theoretical axioms. When I modify certain sentential forms, the complementary body of theories is modified. This modification can be made into a law and lifts itself above the theoretical form, picks out one manifold as a member of manifold of manifolds, a theoretical form of theoretical forms. In this way one obtains a kind of generality that all at once settles the theoretical form of an entire body of manifolds. For example, Euclidean three-dimensional space as n-dimensional and curvature also as an element of an infinite, comprehensive genus. Now general theories for all these genera. In one step, the entire deductive work is over and done with for large groups of manifolds. Understanding of the rigor of groups of sentences and theories that depend on individual axioms.

❖

Mathematical Exercises, June 29

The calculative transformation of the mathematical helped to achieve results, even where parts of the calculation appear that never can be meaningfully exploited, such as $\sqrt{-1}$, etc. Yet the calculating did not go on arbitrarily far. One ran up against limits. For example, in the case of convergent infinite series calculating helped to achieve correct results. Calculating with divergent infinite series did not yield such results.

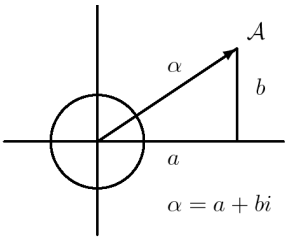
The original naive concept of number was that of the cardinal number:

1) a + b + c, say, 3 bricklayers,

2) 3a = a + a + a. Here 3 is a cardinal number for a cardinal number.

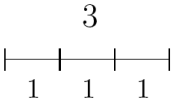
These cardinal numbers must be whole numbers. Already with a fraction we are faced with something meaningless: there is no such thing as half a bricklayer. a – b, a/b are now imaginary cardinal numbers with which one calculates, and in doing this calculation one has gone beyond the original concept of cardinal number. In a domain of continuous magnitudes, one then says the fraction, for example, has meaning. In the case of cardinal numbers of human beings, etc., it has no meaning. Fractions and negative numbers do not signify countersense, then, when one works with continuous magnitudes. Even –a can then be minted into an intuitive sense.

It was due to Gauss that $\sqrt{-1}$ found a representation in geometry.



Dem mathematisch Widersinningen wird in der Geometrie eine anschauliche Darstellung zugeschrieben und daraus argumentiert, daß auch bei jenen imaginären mathematischen Größen kein Widersinn vorläge.

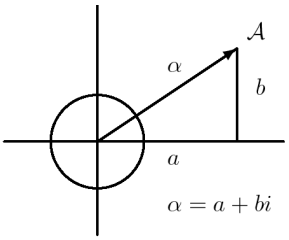
Ist die Lösung: »5 – 7 = –2« ist nicht widersinnig, weil ich es in einer anderen Größensphäre veranschaulichen kann« eine Lösung? Nein, wenn 5 – 7 Antwort auf die Frage »Wieviel?« sein soll, wenn wir also in der Sphäre der Anzahlen bleiben, so bleiben wir bei einem Widersinn, über den uns keine andere Größensphäre hinweghelfen kann. Eine geometrische Strecke gehört einem bestimmten Größengebiet an. Wenn ich ⟨eine⟩ Strecke als Einheit ansetze, kann ich jede Strecke mittels dieser Einheit messen. Eine solche Strecke kann ich wieder teilen, weil es sich um eine stetige Größe handelt. Wenn wir nun eine Strecke als Einheit dreimal aneinandersetzen



so haben wir drei Einheitsstrecken. Hier kommt die Anzahl 3 vor als Anzahl von 1 und 1 und 1 Einheitsstrecken. Bezeichnen wir aber die ganze Strecke als 3, so haben wir einen ganz neuen Zahlbegriff, welcher nur als Voraussetzung in sich die Anzahl enthält. Denn 3 bedeutet eine (1) Strecke, welche, etwa zu 2 anderen Strecken hinzugefügt, eine (1) neue Strecke = 5 ergibt. Das »und« oder + bedeutet hier: »daran gelegt und eine Strecke gebildet«. Die Summe hat damit ihre vollständige Bedeutung verloren. So hat auch a/b hier eine neue Bedeutung gewonnen.

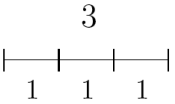
Multiplizieren hat den Sinn: eine Strecke aus a so bilden wie b aus der Einheit gebildet ist. Formal liegt bei Anzahlen und bei geometrischen Strecken wohl dasselbe vor, aber sachlich ganz Verschiedenes. Ein anderer sachlicher Fall wäre etwa, wenn ich zwei Gewichte zusammenbringe. Der Unterschied von Anzahlen und Streckenzahlen ist ein sachlicher. Das Operieren mit verschiedenen Größen, welche denselben Anzahlindex haben, ist formal dasselbe. Darum gingen die Mathematiker von einem zum anderen ohne weiteres mit gutem Instinkt über.

Oder: Gleich lange Strecken mit verschiedener Richtung



In geometry an intuitive representation is ascribed to the mathematically countersensical, and on that basis it is argued that also in the case of imaginary mathematical magnitudes there is no countersense.

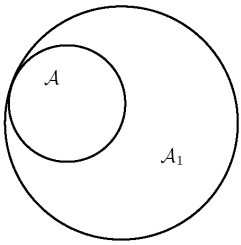
Is the solution: '5 – 7 = –2 not countersensical, because I can illustrate it in another sphere of magnitude' a solution? No, if 5 – 7 is to be an answer to the question 'How much?', thus if we remain in the sphere of cardinal numbers, then we are still faced with a countersense, from which no other sphere of magnitude can help to free us. A geometric line segment belongs to a determinate sphere of magnitude. If I set a line segment as the unit, I can measure every line segment by means of this unit. I can further divide such a line segment because at hand is a continuous magnitude. Now if we set down a line segment three times



we have three unit segments. Here the cardinal number 3 appears as the cardinal number of 1 and 1 and 1 unit segments. If we refer to the entire line segment as 3, however, we have a completely new concept of number, which contains the cardinal number only as a presupposition. For 3 means one (1) line segment that, when added to, say, 2 other line segments, yields one (1) new line segment = 5. Here the 'and' or '+' means: 'placed next to and forming a line segment'. The sum thereby has lost its complete meaning. In this way a/b has also gained a new meaning here.

Multiplication has the meaning: to form a line segment out of a in the same way as b is formed out of the unit. Formally, regarding cardinal numbers and geometric line segments much the same thing is the case, but materially something completely different. Another material instance would be, for example, when I bring together two weights. The difference between cardinal numbers and line segment numbers is a material one. Operating with different magnitudes that have the same cardinal number-index is formally the same thing. That is why mathematicians displayed good instinct when they passed from one to the other without further ado.

Or one can add together equally long line segments with different directions,



kann man beide addieren, d. h. an andere anfügen, an Strecken von dieser oder jener Richtung. Wenn hier »+« das Aneinanderfügen bedeutet und »–« das Wegnehmen bedeutet, so ⟨hat⟩ man vier Zeichen: », , „ , –, +«. Nun überzeugt man sich, daß a, + a,, das gleiche ergibt wie a, – a,. So vereinfacht man die Zeichen. Das freie »,« hat die Bedeutung jenes Index, d. h. ⟨daß⟩ vom Nullpunkt an gewisse Einheiten nach der oder jener Richtung gehen. Jetzt steckt das Richtungszeichen in allen Größen darin, wenn ich mit negativen Zahlen operiere. Bei gewissen Anzahlen, wo ich keine Richtung habe (Schaufel Weizen), hat jene Operation gar keinen Sinn. Ich kann hier keine »metabasis eis allo genos« vollziehen. Es handelt sich um Begriffsreihen, die das Eigentümliche haben, daß die Anzahl als bestimmender Index in ihnen vorkommt. Wir müssen so viel verschiedene Begriffsgruppen unterscheiden als wir begriffliche Gedanken haben, unter denen die Anzahl als Charakteristikum vorkommt.

Das Charakteristische für den neuen Zahlbegriff ist dies, daß das, was die Anzahl jeweils bestimmt, beliebig variierbar ist: f (a, b, c usw.). Hierbei bedeuteten a, b, c die Anzahlen und f den Überschuß über die Anzahlen, und wir finden, daß in den verschiedenen Anzahlgebieten (Strecken, Menschen usw.) parallele Operationen sind. In einem Anzahlgebiet reicht das »–« nur so weit als der Minuend kleiner als der Subtrahend ist. Wenn wir in die parallelen Gebiete gehen, haben wir zwar andere Operationen (»–« hat nicht dieselbe Bedeutung), aber die Form des Operierens ist die gleiche, und sagen: dieselbe Operation läßt hier keine Beschränkung zu.

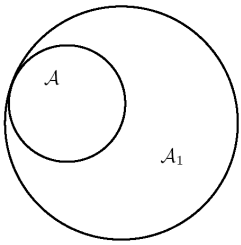
Nicht mit derselben Zahl, sondern mit einer Reihe paralleler Zahlbegriffe haben wir es in den verschiedenen Größengebieten zu tun. Diese Parallele drängt auf die Idee der Formalisierung.

❖

| *Mathematische Übungen, 6. VII. 05* A I 5/72

Es gibt parallele Reihen von Mannigfaltigkeiten, welche ihrer Natur nach verschieden sind (Anzahlen, Streckengrößen), welche gemeinsame formale Gesetze haben (z. B. das +, – usw.). Aber es gelten gewisse Beschränkungen.

Daß das Sinnlose in der einen Mannigfaltigkeit seinen sinnvollen Korrespondenten in der parallelen Mannigfaltigkeit hat, reicht nicht aus, dadurch wird das Sinnlose der einen Mannigfaltigkeit nicht sinnvoll.



that is, attach to others, to line segments with this or that direction. If here '+' means 'attaching to one another' and '–' means 'taking away', then one has four signs: ', , ,, , –, +'. Now one satisfies oneself that 'a, + a,,' yields the same as 'a, – a,'. Thus one simplifies the signs. The free ',' has the meaning of that index, that is, that from the zero point on certain units go in this or that direction. Now the direction sign is in all magnitudes when I operate with negative numbers. In the case of some cardinal numbers where I have no direction (Schaufel Weizen*), that operation makes no sense whatsoever. I cannot make a *metabasis eis allo genos* here. At issue are series of concepts that have the peculiarity that the cardinal number occurs in them as a determinative index. We have to distinguish as many different groups of concepts as we have conceptual thoughts in which the cardinal number occurs as a characteristic.

Characteristic for the new concept of number is that what the cardinal number determines in each case can be varied at will: f (a, b, c, etc.). Here 'a', 'b', 'c' signify cardinal numbers and 'f' the conceptual surplus beyond the cardinal numbers, and we find that in the various domains of cardinal numbers (line segments, human beings, etc.) there are parallel operations. In a domain of cardinal numbers the '–' is operative only as long as the minuend is smaller than the subtrahend. If we move into the parallel domains, we may have other operations ('–' does not have the same meaning) but the form of operating is the same, and we say: the same operation cannot be restricted here.

In the various domains of magnitudee we are dealing not with the same number but with a series of parallel concepts of number. This parallel thrusts forward the idea of formalization.

Mathematical Exercises, July 6, 1905

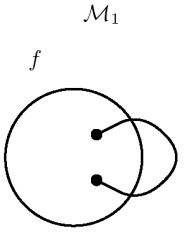
There are parallel series of manifolds which by their nature are different (cardinal numbers, lengths of line segments), which have formal laws in common (e.g. the +, –, etc.). But certain restrictions apply.

It is not sufficient that what is meaningless in one manifold has its meaningful correspondences in the parallel manifold; what is meaningless in the one manifold does not become meaningful thereby.

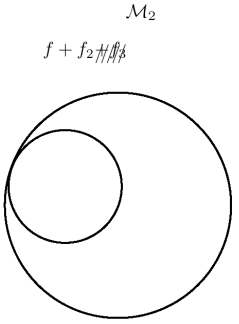
---

* The editors do not know what this expression means.

Soweit in den verschiedenen Mannigfaltigkeiten die gleichen Axiome auftreten, gelten die gleichen Operationen. Dieses ist klar. Aber die verschiedenen Mannigfaltigkeiten haben Sphären, welche Überschüsse über die anderen sind.

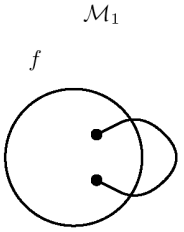


Das Merkwürdige ist aber, daß ich in der einen Mannigfaltigkeit, z. B. der reinen Anzahlenlehre, einen Operationsweg einschlagen kann, welcher durch ein sinnloses Gebiet führt, aber wieder zu einem richtigen und sinnvollen Resultat führt. Der Operationsweg führt durch ein Gebiet, welches für die reine Anzahlenlehre sinnlos ist, für ein parallelles Gebiet, z. B. die Strecken, allerdings sinnvoll wäre. In den Kreis jener ersten Mannigfaltigkeit gehört z. B. a/b nur dann, wenn b in a enthalten ist; wenn b nicht in a enthalten ist, so gibt es falsche Anzahlensätze. Die Begriffe sind wohl bezeichnet, aber sie sind nicht innerhalb der Anzahlenlehre auslösbar oder sinnvoll im Sinne des Wahren. Aber durch eine Reihe von Schlüssen mit sinnlosen Anzahlensätzen gelange ich wieder zu Sätzen, welche im Anzahlengebiete auslösbar und wahr sind. Wie ist dieses möglich? Andere Operationsgänge führen nicht in das durch einheitlichen Sinn abgegrenzte System zurück. Z. B. wenn man mit divergenten Reihen operiert.

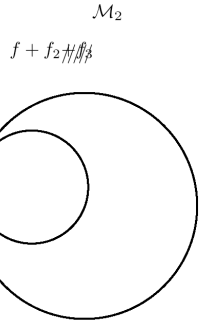


Lösung: Wir gehen von der Wissenschaft von den Anzahlen und den verschiedenen Mannigfaltigkeiten über zu der Idee einer Mannigfaltigkeit überhaupt, zum Begriff einer Mannigfaltigkeit oder der Form einer Mannigfaltigkeit. Diese nehmen wir hypothetisch an und fassen die Anzahlenmannigfaltigkeiten als Konkretionen oder Anwendungen jener Mannigfaltigkeitsform auf. 1 und 2 bedeutet nicht mehr eine Anzahl oder eine Strecke, sondern das 1 ist irgendetwas, für welches gilt, daß 1 + 1 = 2 ist. Nur durch solche formalen Bestimmungen definieren wir jetzt die Zahlen. Zunächst formuliert man natürlich bestimmte Mannigfaltigkeiten, z. B. die Anzahlenlehre, und die Formen

Insofar as the same axioms appear in the various manifolds, the same operations apply. That is obvious. But the various manifolds have spheres that go beyond the others.



What is remarkable, however, is that in the one manifold, for example, in the theory of pure cardinal numbers, I can take an operational path that leads through a meaningless domain, but that again leads to a correct and meaningful result. The operational path leads through a domain that is meaningless for the doctrine of pure cardinal numbers, but would be meaningful for a parallel domain, say, line segments. For example, a/b belongs in the sphere of that first manifold only when b is contained in a; if b is not contained in a, then there are false sentences about cardinal numbers. The concepts are well described, but within the theory of cardinal numbers they are not redeemable or meaningful in the sense of the true. Yet through a series of inferences with meaningless sentences about cardinal numbers I once again reach sentences that are redeemable in the domain of cardinal numbers and are true. How is this possible? Other operational routes do not lead back into the system that is delimited by a unitary meaning. For example, when one operates with divergent series.



Solution: We move from the science of cardinal numbers and diverse manifolds to the idea of a manifold as such, to the concept of manifold or the form of a manifold. We assume this hypothetically and interpret the manifolds of cardinal numbers as concretions or applications of that form of manifold. 1 and 2 no longer mean a cardinal number or a line segment, but 1 is something for which it holds that 1 + 1 = 2. It is only by means of such formal determinations that we now define the numbers. First of all one formulates naturally determined manifolds, for example, the theory of cardinal

entsprechen nur den Begriffen und Gesetzen jenes Anzahlengebietes. »Aus den Axiomen machte ich Axiomsformen, welche die formale Mannigfaltigkeit definieren.« Ich füge nun weitere Satzformen und Axiomsformen hinzu, welche für bestimmte Mannigfaltigkeitsreiche Geltung haben und für andere nicht.

Die Formen der Sätze des Anzahlengebiets, die Formen der Sätze des Streckengebiets usw. sind äquiform, und wenn ich etwas für die Anzahlen beweise, so ist es damit ebenso bewiesen für das Streckengebiet, aufgrund der gleichen Form.

Aber wie kommt man weiter?

S (α), f

S (α), f + f_1. f und f_1 bezeichnen die verschiedenen Mannigfaltigkeitssysteme.

S (α) sind Sätze, welche z. B. nur Anzahlen enthalten.

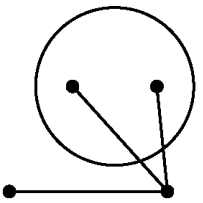
S (α_1) sind Sätze, welche nur Strecken enthalten.

S (α + α_1) sind Sätze, welche sowohl dem Anzahl- und dem Streckengebiete angehören.

Rückblicke: 11. VII. ⟨1905⟩

Das Problem des Imaginären rein formal gestellt.

Eine Mannigfaltigkeit sei durch Axiomsformen formal definiert. Indem wir den Formen der für Anzahlen geltenden Sätze folgen, kommen wir zu imaginären (z. B. –7 für Anzahlen). In parallelen Gebieten, z. B. dem Streckengebiet, kann man diesen Begriffen einen Sinn zuschreiben. Hankel[3] sagt nun: Wir gehen von dem Anzahlgebiet zu dem rein formalen über und definieren die Begriffe einfach so formal. Dann haben sie Sinn. Frage: Wie kann das formale Problem das des Imaginären lösen?



Das Problem des Imaginären wäre nach Hankel gelöst, wenn wir ein vollständiges Axiomensystem haben und, rein formal aus dem Axiomsystem schließend, von Anzahlen ausgehend durch widersinnige Begriffe hindurch schließend wieder bei Anzahlgrößen anlangen. Es werden die Widersinnig-

3. Hermann Hankel (1839–1873), deutscher Mathematiker, der u.a. Formgesetze von verschiedenen Zahlensystemen untersucht hat. Vgl. *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* I: *Theorie der complexen Zahlensysteme* (Leipzig: Voss, 1867).

numbers, and the forms correspond only to the concepts and laws of that domain of cardinal numbers. "Out of the axioms I made the forms of axioms that define the formal manifold." I now add other forms of sentences and of axioms that have validity for determinate realms of manifolds and not for others.

The forms of the sentences in the domain of cardinal numbers, the forms of the sentences of the domain of line segments, etc., are equiformal, and if I prove something for the cardinal numbers, then it is also proven for the domain of line segments, on the basis of the identity of the forms.

But how does one make headway?

S (a), f

S (a), f + f_1. f and f_1 denote the different systems of manifolds.

S (a) are sentences that contain, for example, only cardinal numbers.

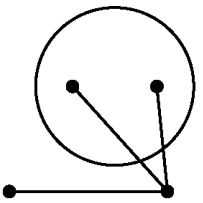
S (a_1) are sentences that contain only lines.

S (a + a_1) are sentences that belong both to the region of cardinal numbers and to that of lines.

Review: July 11, 1905

The problem of the imaginary posed purely formally.

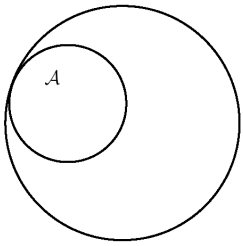
A manifold is said to be formally defined by means of axiomatic forms. By following the forms of sentences that are valid for cardinal numbers, we arrive at imaginary numbers (e.g. –7 for cardinal numbers). In parallel domains, for example, the domain of lines, one can ascribe a meaning to concepts. Now Hankel[3] says: We pass from the domain of cardinal numbers to the purely formal domain and simply define the concepts formally in this way. Then they have meaning. Question: How can the formal problem solve that of the imaginary?



The problem of the imaginary would be solved, according to Hankel, when we have a complete axiomatic system and, inferring purely formally in the axiomatic system, starting from cardinal numbers and passing through countersensical concepts, once again arrive at cardinal number magnitudes. The countersenses along the path of inferences will no longer pose a problem because

3. Hermann Hankel (1839–1873), German mathematician who worked on, among other things, formal laws for various number systems. See his *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* I: *Theorie der complexen Zahlensysteme* (Leipzig: Voss, 1867).

keiten auf dem Schlußwege kein Problem mehr enthalten, weil auch die für das Anzahlengebiet widersinnigen Begriffe formalisiert sind, und das Anzahlengebiet lediglich definiert ist durch die Axiome [Axiomsformen], und in der ganzen Schlußkette kein Schluß auftritt, der nicht rein logisch unter jenen Axiomen steht. Wenn ich also konsistenten Operationen folge, so kann ich auf keinen Trugschluß kommen. Ich gehe von Anzahlbegriffen aus, gehe streng formal schlüssig durch widersinnige Begriffe hindurch und lange wieder an bei sinnvollen Begriffen. Streng formal schlüssig. Hier liegt ein Trugschluß. Gewiß, der Schlußsatz enthält Begriffe, welche auf dem Anzahlengebiet sinnvoll sind. Eine andere Frage ist aber, ob der Satz wahr ist für jenes Gebiet. Bewiesen wird durch jenen formalen Gang durch sinnloses Gebiet nichts. Allerdings kommt der Schlußsatz im Anzahlgebiet vor. Ist der Satz wahr im Sinne der Axiome des engeren Gebiets (Anzahlgebiets), wenn er mittels anderer Axiome deduziert ist?



Entspricht der Deduktion-auf eine Deduktion, welche sich rein innerhalb der Axiome des Anzahlgebiets hält? Gehört β, wenn ich es durch Zuhilfenahme weiterer Axiome gewinne (indem ich durch das andere Gebiet gehe) damit zu den Konsequenzen des Axiomgebiets der Anzahlen? Richtig heißt bloße Konsequenz der Axiome des betreffenden Mannigfaltigkeitsgebiets.

| *Zweites Blatt vom 11. VII.* A I 5/73

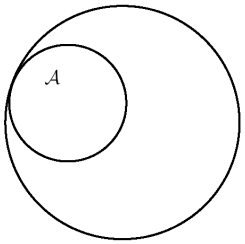
Eine Gleichung muß entweder wahr oder falsch sein.

D. h. eine Gleichung ist so beschaffen (numerisch oder allgemein), daß sie entweder wahr oder falsch ist.

Das ganze Gebiet also zerfällt von Anfang an in zwei Teile: Sätze, die aufgrund der Axiome wahr, und solche, die aufgrund der Axiome falsch sind, d. h. ihnen widersprechen. Jeder Satz, der nur Begriffe einer Mannigfaltigkeitssphäre enthält, folgt entweder aus den Axiomen oder widerspricht den Axiomen. D. h. jeder Satz liegt innerhalb der Axiomssphäre, wenn er wahr ist, oder er liegt außerhalb der Axiomssphäre, wenn er falsch ist.

Wenn ich ein Axiomssystem so definieren kann: »jeder Satz, der Begriffe dieses Axiomsgebiets enthält, ist aufgrund der Axiome entweder wahr oder falsch, d. h. folgt aus den Axiomen oder widerspricht ihnen«, so ist das Problem gelöst. Jeder Satz, der bloß Begriffe des Gebiets enthält, folgt aus den

the countersensical concepts are formalized also for the domain of cardinal numbers, and the domain of cardinal numbers is defined merely by the axioms [axiomatic forms], and in the entire chain of inferences no inference appears that is not as a matter of logic subject to those axioms. Thus if I follow consistent operations, I cannot arrive at any erroneous conclusion. I start from the concept of cardinal number, pass, correctly from a strictly formal point of view, through countersensical concepts, and arrive at concepts that are meaningful again. Strictly formally conclusive. There is a fallacy in here. Certainly, the concluding sentence contains concepts that are meaningful in the domain of cardinal numbers. It is another question, however, whether the sentence is true for that domain. Nothing is proven by means of that formal passage through a meaningless domain. To be sure, the concluding sentence occurs in the domain of cardinal numbers. Is the sentence true in the sense of the axioms of the narrower domain (domain of cardinal numbers) if it is deduced by means of other axioms?



Does a deduction that remains purely within the axioms of the domain of cardinal numbers correspond to the deduction that leaves the domain? If I attain β with the help of other axioms (by passing through the other domain), does it belong then to the consequences of the axiomatic domain of the cardinal numbers? To be correct is to be a mere consequence of the axioms of the relevant domain of manifolds.

Second page from July 11

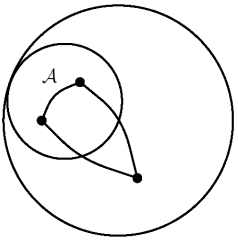
An equation must be either true or false.

That is, an equation is constituted in such a way (numerically or generally) that it is either true or false.

Thus from the beginning the entire domain is divided into two parts: sentences that are true on the basis of the axioms and those that are false on the basis of the axioms, that is, they contradict the latter. Every sentence that contains only concepts from a sphere of manifolds either follows from the axioms or contradicts the axioms. That is to say, every sentence lies within the sphere of axioms if it is true, or it lies outside the sphere of axioms if it is false.

If I can define an axiomatic system as follows: "every sentence that contains concepts from this axiomatic domain is, on the basis of the axioms, either true or false, that is, follows from the axioms or contradicts them," then the problem is solved. Every sentence that contains merely concepts

Axiomen des A oder steht zu ihnen in Widerspruch. Alle Sätze, welche dem Axiomsgebiete A widersprechen, widersprechen damit auch ohne weiteres dem weiteren Axiomsgebiet A_1.



Es ist damit eine ganz besondere Eigenschaft der Mannigfaltigkeit vorgezeichnet.

Jede Gleichung, numerisch fertig gemacht, führt auf 0. Numerisch fertig gemacht heißt ohne weiteres richtig.

Wenn das Axiomssystem nichts offen läßt, so kann man durch das Imaginäre durchgehen; weil aber nichts offen gelassen ist, so muß das Resultat wahr oder falsch sein, mit den Axiomen stimmen oder nicht.

[Ein Satz ist hier immer als eine Gleichung genommen, und es bleibt vorläufig dahingestellt, ob es in der Arithmetik noch außerhalb der Gleichungsbestimmung Begriffe gibt.]

❖

| *Mathematische Übungen, 27. VII.05* A I 5/71

Eingeführt war das Axiomensystem als ein definites.

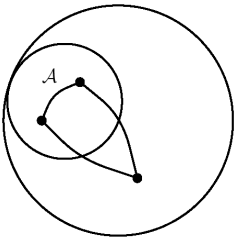
Dazu ist dann kein neues Axiom ohne Widerspruch hinzuzufügen.

Ich kann kein neues Axiom hinzufügen, ohne mit den Axiomen des Systems in Widerspruch zu geraten oder ein überflüssiges zu geben. Dies soll ein außerwesentlich vollständiges Axiomensystem genannt werden.

Im Sinne Hilberts soll davon geschieden werden ein wesentlich vollständiges Axiomensystem. Wenn ich mich z. B. beschränke auf die Sphäre der ganzen Zahlen, so bleibt zumal die Sphäre der Brüche oder der negativen Zahlen offen.

Das wesentlich vollständige Axiomensystem ist die äußerste Sphäre, innerhalb welcher sich die Erweiterung außerwesentlich bewegen kann aufgrund des maßgebenden Axiomensystems. Es ist ein solches, welches in Hinsicht auf die Beziehungs⟨formen keine Möglichkeit offen läßt⟩. Jede formal überhaupt mögliche Festsetzung muß damit schon getroffen sein, oder eine willkürliche formale Festsetzung für irgendwelche Operationen darf nicht mehr getroffen werden können, ohne die Axiome zu verletzen. Hat ein Satz gemäß den Axiomen Sinn, so ist er durch die Axiome für Wahrheit und Falschheit entschieden. Nicht das Axiomssystem, sondern höchstens durch

from the domain follows from the axioms of A or stands in contradiction to them. All sentences that contradict the axiomatic domain A thus contradict without further ado the extended axiomatic region A_1.



This marks out a very special property of the manifold.

Each equation, worked out numerically, leads to 0. 'Worked out numerically' means 'correct without further ado'.

If the axiomatic system leaves nothing open, then one can pass through the imaginary; however, because nothing is left open, the result must be true or false, it must agree with the axioms or not.

[Here a sentence is always taken as an equation, and for the time being it remains to be seen whether there are concepts in arithmetic outside those that determine the equation.]

❖

Mathematical Exercises, July 27, 1905

The axiomatic system was introduced as a definite one.

No new axiom can be added to it, then, without contradiction.

I cannot add a new axiom without falling into contradiction with the axioms of the system or giving something superfluous. Let this be called an extra-essentially complete axiomatic system.

In Hilbert's sense, from such a system is to be distinguished an essentially complete axiomatic system. If I, for example, limit myself to the sphere of whole numbers, then especially the sphere of fractions or of negative numbers remains open.

The essentially complete axiomatic system is the outermost sphere within which the extra-essential extensions can vary on the basis of the determining axiomatic system. It is one that ⟨leaves no possibility open⟩ regarding the relational ⟨forms⟩. Every formal ascertainment that is at all possible must thus be made already, or an arbitrary formal ascertainment for some operation or other may no longer be made without violating the axioms. If the sentence has meaning in accordance with the axioms, then the axioms decide whether it is true or false. Not the axiomatic system but the old system can be extended at most by

ein neues Axiom kann jetzt das alte System erweitert werden, dieses ist eine Erweiterung, welche das alte unberührt läßt.[4]

Die Vollständigkeit ist nun kein Postulat, welches wir willkürlich hinzufügen, sondern es ist ein inneres Notwendiges, d. h. aufgrund des alten Axiomssystems Beweisbares.

(Die außerwesentliche Schließung wäre immer der willkürlich hinzufügbare Satz, daß zu den Axiomen kein neues hinzutreten soll.)

Wesentlich geschlossene perfekte Axiomssysteme sind nicht mehr mathematisch bestimmbar, weil sie ja keine Bestimmungen mehr zulassen, welche nicht in ihnen liegen werden. Z. B. die euklidische Mannigfaltigkeit ist nicht mehr mathematisch bestimmbar.[5] Etwas, was die Formen einer solchen formalen Mannigfaltigkeit hat.

Innerhalb der universalen Mathesis ist jede Mannigfaltigkeit eine konstruierbare.[6]

---

4. Hier scheint gemeint zu sein, daß ein wesentlich vollständiges axiomatisches System nicht dadurch erweitert werden kann, daß weitere (unabhängige) Axiome für die selben Operationen hinzugefügt werden, aber es kann erweitert werden, indem ein Axiom hinzugefügt wird, das ganz neue Operationen betrifft.

5. In der zweiten Auflage seiner *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig: Teubner, 1903) hat David Hilbert gezeigt, daß die Axiomen der euklidischen Geometrie nur ein einziges Modell (bis auf Isomorphismus) bestimmen.

6. Es ist plausibel, daß Husserl hier ›konstruierbar‹ so meint, wie er es in den Notizen zum Doppelvortrag, S. 107 (vgl. auch S. 99) definiert hat. Husserl scheint damit eine Art effektive Definierbarkeit zu meinen: folgt es aus den Axiomen, daß ein bestimmter Gegenstand existiert, so können wir diesen Gegenstand tatsächlich angeben, indem wir von einer Sammlung von vorgegebenen Gegenständen anfangen und ausschließlich die axiomatisierten Operationen verwenden. Sofern Husserl hier nahelegt, daß jeder Existenzbeweis in der klassischen Mathematik konstruktiv geführt werden kann, gibt es keinen Grund zu denken, daß er recht hat. Interessant in diesem Zusammenhang ist Paolo Mancosu, »On the Constructivity of Proofs: A Debate among Behmann, Bernays, Gödel, and Kaufmann«, in Wilfried Sieg, Richard Sommer und Carolyn Talcott (Hrsg.), *Reflections on the Foundations of Mathematics. Essays in Honor of Solomon Feferman*, Association for Symbolic Logic, Lecture Notes in Logic 15, 2002, S. 346–368.

means of a new axiom; this is an extension that leaves the old system untouched.[4]

Now the completeness is not a postulate that we add at will, but rather an inner necessity, that is, something that is provable on the basis of the old axiomatic system.

(The extra-essential completion would always be the sentence, which can be added at will, that no new axiom shall be added to the axioms.)

Essentially closed, perfect axiomatic systems can be determined mathematically no farther, because they no longer allow of any determinations that will not lie in them. For example, the Euclidean manifold can be mathematically determined no farther.[5] Something that has the forms of such a formal manifold.

Within the universal *mathesis* every manifold is a constructible one.[6]

---

4. What seems to be meant here is that an essentially complete axiomatic system cannot be extended by adding further (independent) axioms for the same operations, while it can be extended by adding an axiom concerning an entirely new operation.

5. In the second edition of his *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig: Teubner, 1903), David Hilbert had shown that the axioms of Euclidian geometry determine a unique model (up to isomorphism).

6. It is plausible that Husserl here means 'constructible' in the sense he had defined it in the notes for the *Doppelvortrag*, 107 (see also 99). By this Husserl seems to mean a kind of effective definability property: whenever it follows from the axioms that a certain object exists, we can exhibit this object, starting from a collection of pre-given ones and using only the axiomatized operations. To the extent that Husserl is suggesting here that every existence proof in classical mathematics can be made constructive, there is no reason to think that he is right. Of interest in this regard is Paolo Mancosu, "On the Constructivity of Proofs: A Debate among Behmann, Bernays, Gödel, and Kaufmann," in Wilfried Sieg, Richard Sommer, and Carolyn Talcott, eds., *Reflections on the Foundations of Mathematics: Essays in Honor of Solomon Feferman*, Association for Symbolic Logic, Lecture Notes in Logic 15 (2002), 346–68.